

UMA ENGENHOSA EXPERIÊNCIA DE ENSINO EM ARTE & MATEMÁTICA

Submetido em: 12 set. 2022. Aceito: 22 nov. 2022

Marcio Luis Ferreira Nascimento¹

RESUMO

Arte & Matemática consistiu em uma série brasileira de televisão produzida pela TV Cultura com o apoio do Ministério da Educação exibida em novembro de 2001 e reprisada ao longo dos anos. Assim como a arte, a matemática nem sempre aparenta ser o que é. Apresentamos alguns destes tópicos na forma de uma disciplina num curso de graduação sem pré-requisito a estudantes de Engenharias, Humanidades, Artes, Ciências e Tecnologia, inspirados na série. O objetivo foi apresentar os engenhosos papéis desempenhados pela matemática sempre que possível de um ponto de vista artístico, humanístico, ou ao menos estético. Para tanto, foram escolhidos exemplos interdisciplinares e inspiradores, sendo que um estava relacionado ao conceito de derivada obtido a partir do primeiro desenho computadorizado feito no Brasil em 1969. Dentre diversos temas abordados, iremos ilustrar apenas cinco: derivada, música & logaritmos, fractais, contagem & logaritmos, além de geometria, incluindo aplicações baseadas em aspectos artísticos e culturais.

Palavras-chave: Brasil. Matemática. Arte. Engenharia. Ensino.

ABSTRACT

Art & Mathematics was a Brazilian television series produced by TV Cultura with the support of the Ministry of Education, aired in November 2001 and rerun over the years. Like art, mathematics does not always appear to be what it is. We present some of these topics in the form of an undergraduate class course with no prerequisites for students of Engineering, Humanities, Arts, Science and Technology, inspired by the series. The aim was to present the ingenious roles played by mathematics whenever possible from an artistic, humanistic, or at least from an aesthetic point of view. For that, interdisciplinary and inspiring examples were chosen, and one was related to the concept of derivative obtained from the first computerized drawing made in Brazil in 1969. Among several topics covered, we will illustrate only five: derivative, music & logarithms, fractals, counting & logarithms plus geometry, including applications based on artistic and cultural aspects.

Keywords: Brazil. Mathematics. Art. Engineering. Education.

¹ Doutor em Ciência e Engenharia de Materiais pela UFSCar; Professor Associado do Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil: mlfm@ufba.br

1 INTRODUÇÃO

Em 14 de novembro de 2001, a TV Cultura estreou a série Arte & Matemática (Arte & Matemática, 2001) em horário nobre, com 13 episódios por semana, com duração de 25 minutos cada, atingindo uma audiência de quase um milhão (Nascimento e Barco, 2007, 2022). O objetivo desta série foi primeiro entreter, e segundo, educar, especialmente crianças e jovens. Os autores foram inspirados por um desejo de mudar a percepção pública da matemática para além do saber eminentemente técnico e às vezes árido, levando em conta uma abordagem humanista, artística e, algumas vezes, histórica. Embora a aprendizagem fosse o objetivo secundário, é importante notar que a maior parte da matemática veiculada em todos os episódios tratava de conceitos em nível elementar ou básico. Alguns deles estavam relacionados a padrões numéricos, geometria e perspectiva. Já outros, estavam vinculados a topologia, fractais, caos e derivadas.

Para a maioria das pessoas, a mera menção da palavra matemática evoca lembranças de regras complicadas. No entanto, tais regramentos são apenas ferramentas. Uma forma de trazer conteúdos matemáticos clássicos e novos para um grande público era propor uma série de TV sobre o assunto (Nascimento e Barco, 2022). Pode-se imaginar que a produção de uma proposta desta magnitude não foi muito fácil por não ser tão simples traduzir conceitos matemáticos em termos básicos e apresentar em poucos minutos para um grande público, ao tempo que se buscava manter a atenção. Uma equipe interdisciplinar envolvendo artistas, roteiristas, músicos, poetas, matemáticos, físicos, diretores e historiadores da arte ajudou na tarefa.

Existem alguns exemplos recentes de excelentes séries sobre divulgação matemática, como “*The Story of Maths*” (BBC 4, 2008) ou “*The Code*” (BBC 2, 2011), ambos apresentados pelo matemático, escritor e divulgador científico britânico Marcus Peter Francis du Sautoy (*n.* 1965). Uma série documental inspiradora foi “*Life By The Numbers*” (WQED Pittsburgh / PBS, 1998), que teve como consultor o matemático, escritor e divulgador científico britânico Keith James Devlin (*n.* 1947) (Devlin, 1998). Tal série foi apresentada pelo ator, diretor de cinema e ativista americano Daniel Lebern Glover (*n.* 1946).

A aprendizagem pode ser vista como um processo artístico. Tanto matemáticos quanto artistas praticam suas atividades de várias maneiras, mas uma atividade

comum é a *repetição*. Este procedimento é uma das formas mais simples de adquirir conhecimento. Enquanto autor prolífico sobre o assunto, Hans Freudenthal (1905 - 1990), matemático holandês nascido na Alemanha, escreveu relevantes textos sobre educação matemática (Freudenthal 1973, 1978). Ele acreditava que a matemática consiste numa atividade humana, o que significa ser essencialmente um *processo*. Por exemplo, Freudenthal afirmou que um problema matemático estabelecido em livros didáticos geralmente descreve “o núcleo de uma situação de maneira deveras abstrata”. Como professor de matemática e pesquisador na Universidade, Freudenthal costumava usar a abordagem do grupo Bourbaki,² introduzindo belos teoremas com precisão por meio a linguagem da teoria de conjuntos. Freudenthal observou a necessidade de fundir “a realidade cotidiana na matemática enquanto fonte de aprendizagem, e não apenas visando aplicações, enfatizando a relevância de contextos temáticos mais ricos” (Freudenthal, 1973).

Assim como os artistas, os matemáticos se inspiram em uma variedade surpreendente de fontes. Para deixar claro, a série Arte & Matemática fez uso de semelhanças entre essas duas atividades humanas acreditando que o desenvolvimento cognitivo (pelo menos em matemática) começa *geralmente* do concreto em direção ao abstrato, seguindo as propostas educacionais de Freudenthal (Freudenthal, 1973). Similarmente, em um nível igualmente elevado, obras de arte abstratas podem ser comparadas a ideias matemáticas, o que apenas reforça o argumento. No entanto, as ilustrações usadas nesta série foram mantidas o mais concretas e simples possível, dado seu caráter televisivo - ou seja, na forma de entretenimento.

Como parte da experiência de muitos em salas de aula ao redor do mundo, adjetivos como *chato*, *maçante*, *irrelevante*, *sem vida*, *desinteressante*, *rígido* e *tedioso* são costumeiramente vinculados à matemática. Em termos freireanos (Freire, 1968), é necessária uma abordagem que aproxime discentes do gostar de aprender, especialmente matemática. Longe de ser um assunto árido e monótono, a matemática é uma ferramenta poderosa que lida não apenas com a natureza, mas também com aspectos humanos, como a arte. Na verdade, a natureza da

² Bourbaki consiste no pseudônimo de um coletivo de matemáticos, majoritariamente franceses, que escreveram sobre uma série de livros em que apresentavam tópicos da matemática moderna em idos de 1935, influenciando o conteúdo do ensino desde então.

matemática é essencialmente humana, como defendido pela matemática e filósofa brasileira Tatiana Marins Roque (n. 1970) em suas redes sociais. Além disso, Roque publicou um admirável livro de história da matemática (Roque, 2012).

Um dos objetivos desta série foi mostrar que a matemática é bela: requintadamente austera, intelectualmente elegante e admirável. Sim, bonita de se ver. Mesmo quando alguns conceitos são algo abstratos, eles podem ser comparados à arte. Essa visão não é nova: o filósofo, matemático, lógico, escritor, historiador, ativista político, crítico social e Prêmio Nobel britânico Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970) disse certa vez que a matemática tem “uma beleza suprema capaz de uma perfeição severa como só a maior arte pode mostrar” (Russell, 1917; Nascimento, 2018). O engenheiro e matemático americano Jerry Porter King (n. 1935) também escreveu que a força motivadora da matemática é a beleza, seguida de seu objetivo: a verdade. E, finalmente, a importância que resulta do que as verdades matemáticas mostram: a realidade (King, 1992).

Alguns matemáticos(as) podem pensar em si mesmos enquanto artistas - e seus trabalhos demonstram que de fato realmente são - mas muitas vezes os(as) artistas não se veem como matemáticos(as). O pintor brasileiro Wesley Duke Lee (1931 - 2010) no terceiro episódio desta série (“O Artista e o Matemático”) sentenciou: “a matemática é um saber que apresenta um certo tipo de beleza. Uma beleza diferente por exemplo da beleza da música ou da pintura. Diferente, mas igualmente agradável. A beleza da matemática está na estética do raciocínio” (Nascimento, 2017).

Outro objetivo desta série foi mostrar que a matemática não deveria ser ensinada por meio de tópicos curtos e isolados. Uma forma de apresentar suas principais ideias seria por meio da arte, que tem uma evolução histórica interessante e difusa, apresentando diferentes pessoas em diferentes lugares, formatos, contextos e épocas.

Autores como o matemático americano Reuben Laznovsky (1927 - 2020), conhecido por seu pseudônimo Reuben Hersh, defendeu uma compreensão histórica da matemática (Hersh, 1997).

Em particular, a série televisiva justificou o uso de obras brasileiras devido ao livro de Hersh, que certa vez afirmou que “do ponto de vista da filosofia a matemática deve ser entendida como uma atividade humana, um fenômeno social,

parte da cultura humana, historicamente evoluída e inteligível, inserida em um contexto social” (Hersh, 1997). Foram apresentadas obras de arte universais, principalmente porque a matemática também é uma linguagem que atravessa fronteiras, mas a série preferiu ilustrar as ideias matemáticas usando, tanto quanto possível, representações artísticas e culturais do Brasil. Essa escolha também se baseou em parte na *etnomatemática* (D’Ambrosio, 1985). Outros objetivos importantes nesta série visavam traçar sugestivos paralelos entre arte e matemática sem necessidade de pré-requisitos (Nascimento e Barco, 2022).

1.1 A SÉRIE TELEVISIVA BRASILEIRA

Arte & Matemática foi produzido pela Secretaria de Educação a Distância (SEED) do Ministério da Educação (MEC), TV Escola e a Fundação Padre Anchieta, sede da TV Cultura. Tudo começou com uma entrevista com o matemático e comunicador brasileiro Luiz Barco (*n.* 1939) no início de 2000 sobre sua visão sobre possíveis conexões entre arte e matemática para uma série de televisão.

Após o estranhamento inicial, porque como regra geral a matemática é o último tema para o qual a televisão gravita, uma das questões básicas desta entrevista foi a seguinte: há algo em comum entre matemática e arte?

A resposta foi surpreendentemente sim. A arte e a matemática permeiam quase todos os aspectos de nossas vidas. Independentemente do tipo de arte, pintura, escultura, música, teatro, dança, cinema ou poesia, matemática e arte usam a abstração, exercitam a imaginação e consideram objetos primordiais, como formas ou sons com números. O projeto também deveria se valer de exemplos artísticos e culturais brasileiros (D’Ambrosio, 1985).

Tanto a arte quanto a matemática usam termos comuns como *estética*, *perfeição*, *organização* e *rigor*. Buscam *equilíbrio*, *harmonia* e *simplicidade*. São consideradas *linguagens*. Qualquer um pode ver que eles se esforçam para procurar padrões e, curiosamente, até a ausência de um padrão é celebrada.

O convite surgiu devido à longa experiência do professor Barco em publicar uma coluna mensal sobre educação e matemática em uma revista brasileira de divulgação científica, denominada Superinteressante – cuja coluna foi publicada pela primeira vez em setembro de 1987. Tal espaço sobre matemática intitulava-se “Dois

Mais Dois". Desde a primeira edição, rapidamente se tornou a mais popular. Outro motivo estava relacionado a um prêmio especial conquistado em 1975 pela Fundação Padre Anchieta, que veiculava o Projeto *Tele Escola*. O trabalho foi elaborado e apresentado pelo próprio Barco para alunos brasileiros do ensino médio (a partir de 12 anos) e teve como objetivo explicar conceitos e operações matemáticas. Ao ser escolhido vencedor, foi mencionado como um "programa que engenhosamente expôs o conceito de 'números inteiros relativos'" (*The Japan Prize*, 1975).

Os treze episódios da série *Arte & Matemática* foram assim intitulados: *i)* Do Zero ao Infinito; *ii)* Arte e Números; *iii)* O Artista e o Matemático; *iv)* A Ordem no Caos; *v)* Simetrias; *vi)* O Número de Ouro; *vii)* Música das Esferas; *viii)* A Matemática da Música; *ix)* Tempo e Infinito; *x)* Forma Dentro da Forma; *xi)* Forma que se Transforma; *xii)* Caos; *xiii)* O Belo.

Esta série foi premiada com o *Silver Dragon* no *II International Scientific Film Festival* em Pequim, China, em 2003. Tal prêmio foi concedido pelo conteúdo do Episódio 4: "A Ordem no Caos", classificado enquanto vencedor do grupo "Programas para a Juventude". Este não foi o primeiro prêmio que a série obteve. Em 2001, a mesma série havia sido laureada com o Prêmio Maeda, na categoria "Educação para a Juventude", durante a 28ª competição do *Japan International Education Prize*, considerando o mesmo episódio (*The Japan Prize*, 2001).

2 A PROPOSTA DE ENSINO

Neste trabalho apresentamos exemplos aplicados por meio de uma experiência de ensino na graduação baseada na série televisiva. Uma componente curricular foi ofertada sem pré-requisitos tanto presencialmente em sala de aula nos anos de 2011, 2012, 2013, 2014, 2016, e 2022, quanto remotamente, durante a pandemia Covid a alunos(as) dos Bacharelados Interdisciplinares de Humanidades, Artes, Saúde e Ciência e Tecnologia da Universidade Federal da Bahia. Alunos(as) de outros cursos da instituição, como Engenharias, Direito, Medicina, Farmácia, Biologia, Filosofia, História... também, participaram, além de discentes de diversas licenciaturas.

Na concepção do ensino buscou-se apresentar algumas engenhosas relações entre a arte e a matemática através dos tempos, em especial ilustrando a linguagem

matemática por meio da arte e a visão artística da matemática baseados em alguns engenhosos exemplos e aplicações. Sempre que possível foram enaltecidas noções de beleza e estética em ambas áreas.

Uma meta do curso foi fornecer ao corpo discente uma fundamentação matemática básica em tópicos relacionados à matemática sob um viés estético e com uso de exemplos e aplicações, em especial de engenharia, envolvendo desde conceitos primordiais como número, forma e padrões até conceitos mais recentes de fractais, caos e sistemas dinâmicos em nível introdutório, baseado em engenhosos exemplos e aplicações.

Foram efetuadas abordagens metodológicas ativas, expositivas, participativas e colaborativas visando a aplicação de exercícios e conceitos matemáticos em diversos exemplos das ciências e engenharias.

O conteúdo programático iniciou com a história da série televisiva e discussões sobre a origem da arte e da matemática, traçando paralelos. Inicialmente foram apresentados os conceitos de senso numérico, número e proporção, enfocando a parte histórica e clássica da geometria. Noções de lógica foram introduzidas sob um enfoque estético. Em seguida, durante o período correspondente ao renascimento, a relevância geométrica da perspectiva. Num segundo momento foram apresentadas noções de padrões e simetria, incluindo a definição de número áureo, tão cara aos artistas. Na terça parte do curso, foram introduzidas noções de ordem e caos, infinito, infinitesimais e uma breve essência da ideia de derivada enquanto processo de otimização. Vínculos da matemática a partir da proposta pitagórica das notas da escala pentatônica levaram, ao conceber a natureza do som e da música, à discussão da escala temperada de Bach, essencialmente logarítmica. A partir destas noções foi possível compreender melhor o significado de ritmo, dança e demais expressões corporais, pois são essencialmente manifestações em que a arte e a matemática se encontram. Alguns poucos exemplos e aplicações necessitaram do uso de *softwares*, sendo escolhido planilhas em Excel para demonstração de alguns resultados numéricos e gráficos.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentamos os resultados obtidos no trabalho e sua discussão em relação a cinco tópicos selecionados, alguns apresentados, outros apenas inspirados na série televisiva.

Os matemáticos frequentemente discutem sobre belos teoremas e belas provas. Semelhante à arte, questões de beleza, elegância, prazer, graça, simplicidade, estilo, clareza e prática são assuntos intrigantes. Isso também é matemática, e esperamos que os exemplos ilustrem parte do propósito do curso.

3.1 DERIVADAS DE UMA IMAGEM

Waldemar Cordeiro (1925 – 1973, Figura 1), *designer*, ilustrador, jornalista e crítico de arte ítalo-brasileiro, foi um dos pioneiros internacionais da arte computacional trabalhando no Brasil. Integrante da cena de vanguarda brasileira que desenvolveu a Arte Concreta na década de 1950, iniciou uma nova forma de arte feita por computadores em 1968 com o engenheiro e físico ítalo-brasileiro Giorgio Moscati (n. 1934). De acordo com Moscati (Velho, 1993), eles tiveram muitas discussões sobre o papel que os computadores poderiam desempenhar na exibição ou mesmo elaboração de obras de arte. Naquela época, muitos artistas estavam começando a explorar a tecnologia de computação emergente para seu uso como uma ferramenta criativa (Noll, 1994).

Figura 1 Waldemar Cordeiro (1925 – 1973), designer, ilustrador, jornalista e crítico de arte ítalo-brasileiro



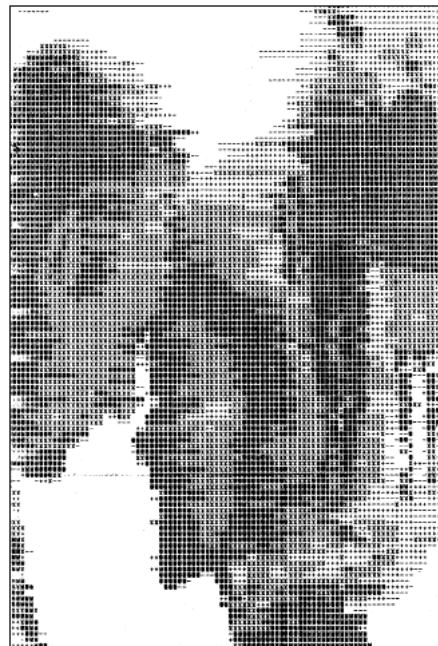
Waldemar Cordeiro

Fonte: Warburg - Centro de História da Arte e Arqueologia da Unicamp (2022).

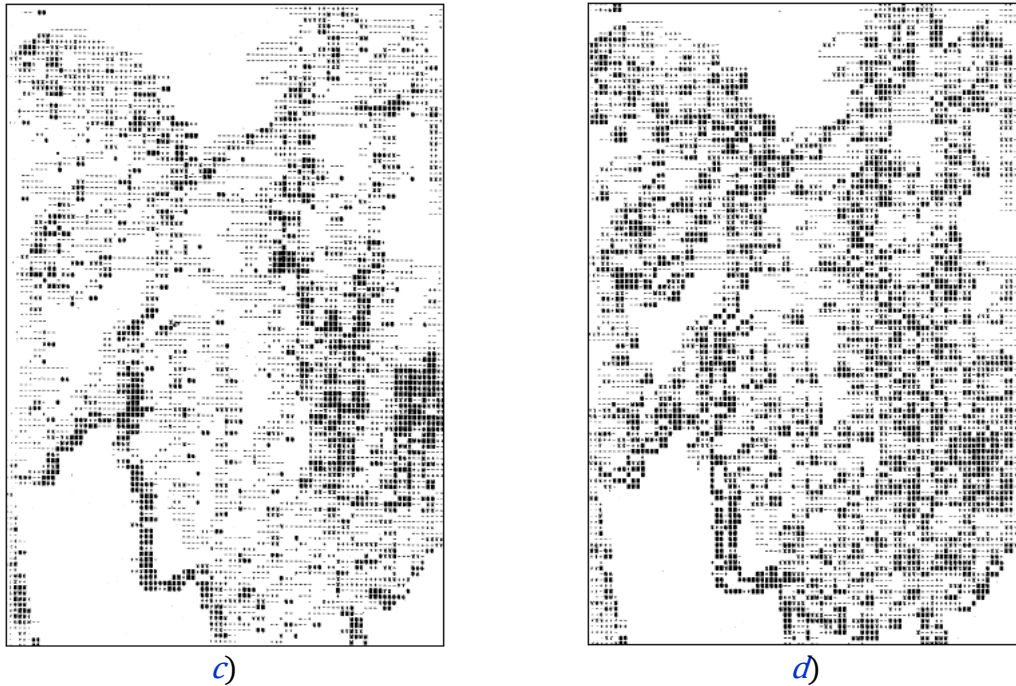
Figura 2 - a) Cartão de Dia dos Namorados escolhido por Cordeiro para a primeira obra de arte visual em computador feita no Brasil (1969). b) *Grau zero* ou simplesmente a imagem digitalizada, com 10.976 pontos, cada ponto referente a sete níveis, de zero a seis. c) *Grau um* - primeira derivada. d) *Grau dois* - segunda derivada



a)



b)



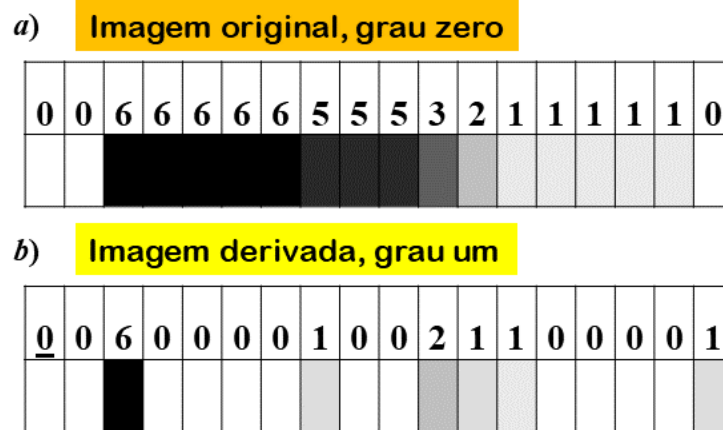
Fonte: Acervo de Giorgio Moscati (2022).

Cordeiro e Moscati discutiram maneiras de transformar uma determinada imagem usando computadores e decidiram pelo conceito de derivada. Cordeiro escolheu uma imagem particular, de conteúdo emotivo, um cartão de Dia dos Namorados (Figura 2a). Nesta imagem original, um jovem casal expressava afeto mútuo através do contato físico. Esse quadro precisou ser transformado para ser compreendido por uma máquina (Velho, 1993).

Assim, foi digitalizado o cartão do Dia dos Namorados. Em seguida, foi desenvolvido um programa de derivação para o processo de imagem (Figura 2b). A imagem foi transformada em dígitos distribuídos numa matriz 98×112 (correspondendo a 10.976 pontos) com níveis de cinza divididos por sete, numa escala arbitrária de zero (branco) a seis (preto) para cada ponto.

Basicamente, se em uma linha se tem a seguinte sucessão de pontos da esquerda para a direita, a linha “derivada” tem a seguinte estrutura (Velho, 1993):

Figura 3 - a) Esquema de uma linha da imagem digitalizada, com números entre zero e seis (equivalente a uma linha *grau zero*). b) a respectiva linha derivada (equivalente a uma linha *grau um*)



Fonte: O autor (2022).

A regra é simples: considerando dois dígitos n e m em sequência, se forem iguais a diferença é zero. Caso contrário, sua diferença é considerada apenas como um valor positivo. No exemplo da Figura 3, quando se tem 0 e 6 na linha *grau zero*, então 6 na derivada correspondente; se 6 e 6 na linha *grau zero*, então 0 na derivada; se 5 e 3 na linha *grau zero*, então 2 na derivada; se 3 e 2 na linha *grau zero*, então 1 na derivada, e assim por diante.

Assim, é simples observar a aplicação do conceito de derivada: da esquerda para a direita e ponto a ponto. Se não houver variação entre dois pontos na linha *grau zero*, o resultado é zero na derivada; também, a escala de cinza ajuda a visualizar a variação entre dois vizinhos.

Nas bordas esquerdas, Moscati decidiu repetir os mesmos valores da imagem anterior (no exemplo da Figura 3, há um zero sublinhado). O resultado foi claro: o computador transformou uma imagem sombreada em uma imagem de contorno, conforme a Figura 2c.

Em suma, esse procedimento matemático se deve ao fato de que onde quer que a intensidade da imagem digitalizada permaneça constante, a derivada será zero e, portanto, branca; e onde quer que a intensidade mude abruptamente de claro para escuro, a imagem derivada varia suavemente (Velho, 1993). Dessa forma foi possível criar o primeiro desenho computadorizado feito no Brasil em 1969.

Cordeiro e Moscati resolveram problemas técnicos relacionados à distorção (as plotagens foram impressas com dimensões $47 \times 34,5 \text{ cm}^2$), entre outros. Como era

de se esperar, a imagem derivada era semelhante à digitalizada, pois só transformavam a imagem por meio de vários graus de claro/escuro (Velho, 1993). Derivadas sucessivas aplicadas no mesmo objeto gradualmente perderam informações (Figura 2d). Cordeiro e Moscati decidiram que seu trabalho consistiria em quatro imagens, a digitalizada e três derivadas sucessivas e as denominaram “Derivadas de uma Imagem”. As quatro imagens foram: *i) grau zero* - a digitalizada (Figura 2b); *ii) grau um* - primeira derivada (Figura 2c); *iii) grau dois* - segunda derivada (Figura 2d); e *iv) grau três* - terceira derivada (não apresentada).

Cordeiro definiu este trabalho como *arteônica*, escrevendo um manifesto concreto em 1971 (Cordeiro, 1997). Segundo Fabris (1997), essa nova arte computacional “não apenas transforma a natureza da imagem transposta, mas também a expõe a uma fruição mais ampla e refinada”. Ainda, Cordeiro observou que “uma segunda possibilidade, com ênfase na sintaxe visual e baseada na Arte Concreta, era capaz de produzir trabalhos interdisciplinares a partir de achados nos campos da Gestalt e da Neurologia”. Ele também considerou o “computador como um instrumento para mudar a sociedade por sua capacidade de traduzir a realidade em formato digital e sua capacidade de oferecer alternativas de desenvolvimento por meio de processos de simulação” (Fabris, 1997). Cordeiro usou essa transformação particular em outras obras, como “Retrato de Fabiana”, 1970, “A mulher que não é B.B.”, 1971 e “Gente”, 1972/1973 (Velho, 1993).

3.2 LOGARITMOS, MÚSICA & FRACTAIS

A música tem sido usada há muito tempo para expressar sentimentos e emoções humanas. É interessante notar que a escala musical, mais precisamente as conhecidas notas de frequência **Dó – Ré – Mi – Fá – Sol – Lá – Si** (ou seja, a escala maior) foram alteradas para uma progressão geométrica (logarítmica, cromática ou igualmente temperada) de proporção $\sqrt[12]{2}$, seguindo **Dó – Dó# – Ré – Ré# – Mi – Fá – Fá# – Sol – Sol# – Lá – Lá# – Si** pelo compositor e músico alemão Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) (Parker, 2009). Então, quando se ouve uma sonata para piano, ou jazz, ou mesmo samba, na verdade está ouvindo números! Não apenas a música, mas qualquer tipo de dança, com seu ritmo, pode ser expressa em termos matemáticos (Nascimento, 2023).

Esta proporção especial: $\sqrt[12]{2}$, vem diretamente quando se divide notas de

frequência consecutivas (em Hertz ou Hz) de uma escala cromática: por exemplo, **Mi** tem 329,63 Hz e **Fá**, 349,23 Hz; **Sol#** tem 415,3 Hz e **Lá**, 440 Hz. Tais notas apresentaram a mesma proporção, $\sqrt[12]{2}$. Bach aplicou essa nova escala musical em sua obra-prima “*Das Wohltemperierte Klavier*” (“O Cravo Bem Temperado”) em 1722, mas “ainda é um mistério por que ele escolheu notas de frequência tão específicas distribuídas logaritmicamente” (Nascimento, 2016, 2023).

Os logaritmos foram descobertos e publicados pela primeira vez pelo matemático, astrônomo e filósofo escocês John Napier (1550 - 1617) em 1614, em sua obra-prima “*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*” (ou “Uma Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos”). Nas primeiras páginas desta obra, Napier estabeleceu sua técnica de criação de logaritmos com base em um ponto que se move seguindo duas progressões. Em seu livro póstumo de 1619, “*Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*” (ou “Uma Construção da Maravilhosa Lei dos Logaritmos”) foi feita uma apresentação mais simples e clara, apenas perguntando qual seria a relação entre:

- uma progressão aritmética:

1 2 3 4 5 6 ... **(1)**

- uma progressão geométrica:

2 4 8 16 32 64 ... **(2)**

A resposta, obtida a partir da observação nas sequências numéricas em **(1)** e **(2)** é uma relação entre tais progressões usando dois enquanto número base:

$2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$ $2^6 = 64$... **(3)**

sendo o expoente (ou potência) nomeado enquanto logaritmo ou “*numeri artificialis*” (“números artificiais”). Em poucos anos, os logaritmos foram rapidamente aplicados na Astronomia, como fez o brilhante matemático, astrônomo e astrólogo alemão Johannes Kepler (1571 - 1630).

Os críticos de música compararam uma escala musical à precisão matemática. Outra relação curiosa entre música e matemática foi dada por Bach. Uma das composições mais famosas do mundo, “*Ave Maria*”, também chamada de “*Saudação Angelical*”, tem uma estrutura musical interessante. Foi gravada no texto latino da oração de mesmo nome e desenvolvida em 1853 a partir de uma melodia do

compositor romântico francês Charles Gounod (1818 - 1893). Esta composição foi inspirada e especialmente desenhada para ser sobreposta ao Prelúdio nº 1 em dó maior, BWV 846, do Livro I do citado “O Cravo Bem Temperado”. De fato, Gounod havia publicado a composição sob o título: “*Meditation sur le Premier Prélude de Piano de S. Bach*” (Nascimento, 2016).

Outra ideia matemática interessante está relacionada a essa melodia sagrada. O tema principal (ou núcleo) em “Ave Maria” é recorrentemente repetido mas não da mesma forma, pelo menos para um ouvinte comum. Tal estrutura melódica tem afinidades com rascunhos, diagramas e esboços visuais que os matemáticos chamam de *fractais*. Curiosamente, é a repetição de um determinado tema ao longo da canção que os matemáticos entendem como autossimilaridade, repetir, repetir e repetir... Em suma, cada parte do todo é um todo para a parte (Nascimento, 2016).

3.3 CONTANDO PALAVRAS

As palavras guardam segredos. Curiosamente, um deles foi revelado por um amante das línguas por meio da matemática.

George Kingsley Zipf (1902 – 1950) foi um linguista e filólogo americano apaixonado pelas letras. Todas elas. Especializou-se em alemão. Formado pela Universidade de Harvard, estudou também nas Universidades de Bonn e Berlim.

Certa feita, em idos de 1935, Zipf deparou-se com a frequência das palavras nos textos que lia (Zipf, 1935). Em linhas gerais, algumas palavras são usadas muito frequentemente e outras, raramente. Para tanto, as listou em ordem *decrecente* de uso. Mesmo em diferentes contextos e assuntos, observou que a palavra de uma lista costumava ser aproximadamente duas vezes mais frequente que a segunda, e três vezes com maior frequência que a terceira.

Em português, as três palavras mais usadas são o artigo “a”, a preposição “de” e a conjunção “e”. Similarmente, e respeitando as diferenças de idioma, pode-se citar em inglês o artigo “the”, a preposição “of” e a conjunção “and”, sendo que, neste caso, “the” aparece quase duas vezes mais do que “of” e quase duas vezes e meia mais do que “and”.

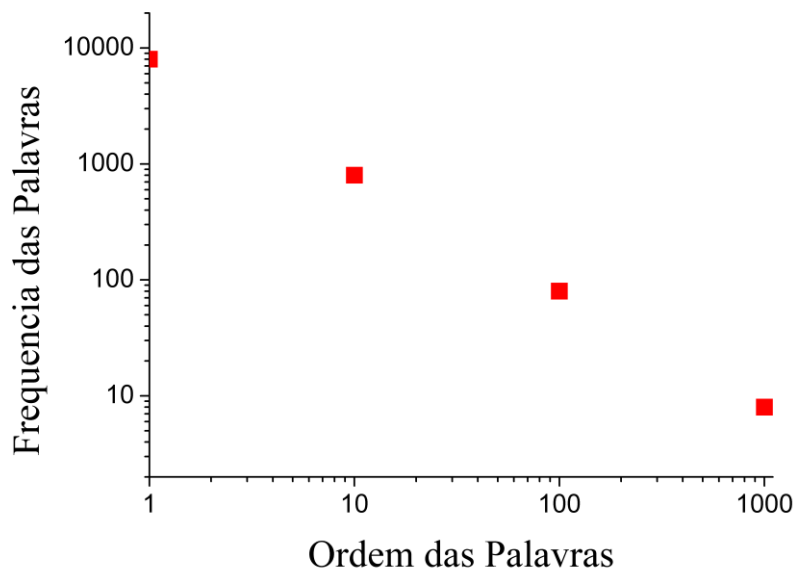
Pode-se afirmar que cada língua, bem como cada sotaque, tem suas particularidades. Em português, os artigos mais usados são, na ordem: a, o, um; preposições: de, em, para; conjunções: e, mas, ou; pronomes: que, eu, você;

substantivos: *coisa, casa, tempo*; adjetivos: *bom, grande, melhor*; verbos: *ser, ir, estar*; advérbios: *não, mais, muito*; numerais: *um, dois, primeiro*. Não é tão difícil perceber a diferença entre a frequência das palavras, pois há por exemplo poucos artigos e dezenas de milhares de substantivos em português. É comumente usamos o artigo antes de quase todo substantivo: *a coisa, a casa, o tempo*, entre outros. Desta forma, os artigos ocorrem naturalmente com maior frequência que os substantivos.

Este peculiar comportamento das palavras havia sido apontado por outros pesquisadores, como o escritor e estenógrafo francês Jean-Baptist Estoup (1868 - 1950) e o físico alemão Felix Auerbach (1856 - 1933). Todos perceberam uma distribuição recorrente em diversos tipos de dados de diferentes origens. No entanto, Zipf debruçou-se a explicar matematicamente. Em linhas gerais, admitiu que tanto quem fala quanto quem escuta busca fazer o menor esforço possível na comunicação. Este raciocínio o levou conclusões estatísticas ao ordenar as palavras em ordem decrescente de frequência.

Assim, ao analisar a obra monumental do escritor, contista, romancista e poeta irlandês James Augustine Aloysius Joyce (1882 - 1941), "*Ulisses*" (1922), Zipf contou as palavras distintas, ordenando-as por frequência, verificando que a palavra mais comum surgia 8.000 vezes; a décima, 800 vezes; a centésima, 80 vezes; e a milésima, 8 vezes. Este ordenamento decrescente apresenta uma relação intrigante e exponencial (ou se quiser, logarítmico), onde a palavra mais comum foi encontrada aos milhares, a décima em centenas, a centésima em dezenas e a milésima em meras unidades, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 - Exemplo de aplicação da Lei de Zipf ao ordenamento de palavras por frequência num texto literário, onde a palavra mais comum surgiu 8000 vezes; a décima, 800 vezes; a centésima, 80 vezes; e a milésima, 8 vezes



Fonte: O autor (2022).

3.4 MÁQUINA DE HIPÁCIA

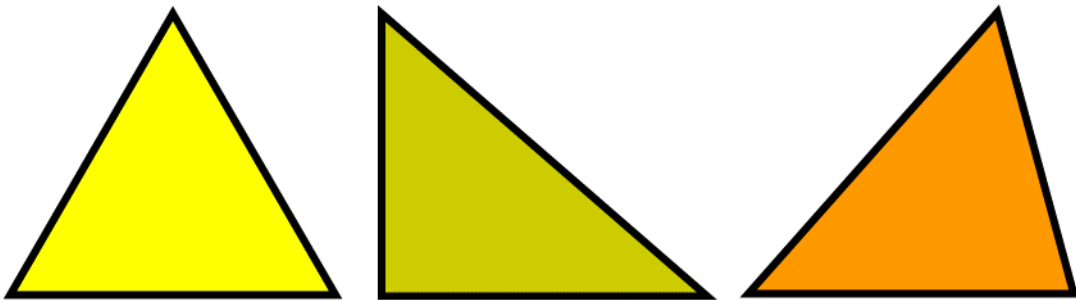
Aprende-se desde cedo que a área de qualquer triângulo consiste na metade do produto da base pela altura, o que é equivalente a dizer também metade do produto da altura pela base. No entanto, pouca ênfase é dada as pessoas que descobriram tal regra, entre elas a primeira grande matemática da antiguidade, Hipácia (c. 370 – 415 d.C.), que foi também uma importante filósofa e astrônoma egípcia.

A Figura 5 apresenta uma maneira de se demonstrar o cálculo da área de qualquer triângulo, dados altura H e largura da base B . Basta dividir a altura H em duas partes e observar a construção de um retângulo de área B vezes metade de H ao se “desconstruir” cada triângulo. A linha média que divide a altura também separa cada um dos triângulos em partes, sendo a parte inferior um quadrilátero. Ao se observar a metade superior dos triângulos equilátero (a esquerda) e escaleno (a direita) a partir do vértice, e por uma linha vertical, dois outros triângulos menores são formados. Cada um destes triângulos menores pode ser movido, ou deslocado, complementando os quadriláteros da parte inferior, e conseqüentemente formando retângulos de área B vezes metade de H .

Figura 5 - Demonstração do cálculo de área de um triângulo qualquer, de altura H e largura B .

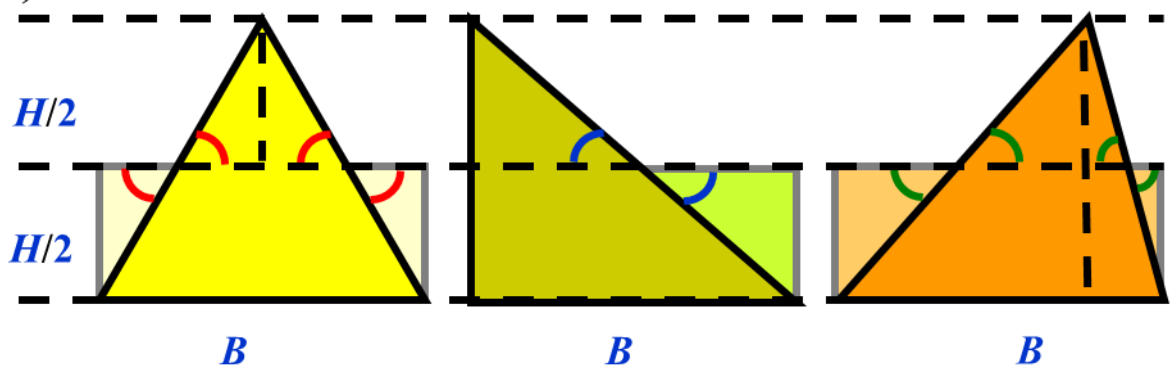
a) Três triângulos: equilátero, isósceles e escaleno, da esquerda para a direita.

a)



b) Ao dividir a altura H em partes iguais, formam-se quadriláteros na parte inferior a linha média. A partir disto, é possível seccionar a parte superior dos triângulos equilátero (à esquerda) e escaleno (à direita) de forma tal e perceber que os triângulos seccionados a partir do vértice, por uma vertical, podem ser deslocados, complementar os quadriláteros e produzir um retângulo de base B e altura $H/2$. O triângulo isósceles, ao centro, ilustra mais facilmente como a parte superior do triângulo pode ser deslocada e preencher um retângulo de metade da área $B \cdot H$, devido a congruência dos ângulos internos indicados

b)



Fonte: O autor (2022).

Um dispositivo pode ser elaborado mecanicamente por meio de pedaços de madeira para ilustrar geometricamente os passos indicados. Não à toa, os termos *dispositivo* ou *ferramenta*, quando escritos em grego, são chamados de *makhana*, ou ainda *machina* em latim. A máquina de Hipácia transforma, portanto, qualquer triângulo num retângulo de mesma área.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos brevemente alguns exemplos de uma experiência de ensino de matemática relacionada a uma disciplina de graduação sem pré-requisitos, voltada aos Bacharelados Interdisciplinares e outros discentes da Universidade Federal da Bahia. Estes foram inspirados na série brasileira de TV Arte & Matemática, composta por treze programas de meia hora transformados numa experiência de curso de 68 h. O objetivo era cultivar uma perspectiva diferente para abordar a matemática de uma nova maneira. Esta série foi criada para mostrar que, em muitos casos, História, Arte e Matemática se misturam e que algumas regras matemáticas são artísticas.

Arte e matemática se sobrepõem porque lidam com atividades ou produtos particulares feitos por humanos para fins estéticos ou comunicativos, expressando ideias ao longo do tempo. Poetas escrevem poemas de forma similar à que matemáticos estabelecem teoremas.

Todos os episódios faziam referência desde os primeiros artefatos da civilização às obras de arte contemporâneas, apresentando a riqueza da arte, cultura e história universal e brasileira. É possível concluir que o foco da matemática educacional precisa mudar. Primeiro é necessário admitir que a maioria das pessoas não reconhecem a presença matemática no dia a dia. Em segundo lugar, lições como fractais, logaritmos, e mesmo derivada, podem ser introduzidas em níveis relativamente simples a estudantes com dificuldades ao manipular números e formas.

Em vez de ensinar matemática como mera manipulação de números, linhas e algoritmos, é importante (e possível) ilustrar a beleza matemática na sala de aula usando a arte. Isso simplesmente porque a matemática pode ser vista como a “arte das construções abstratas” e a arte como “a ciência de retratar pensamentos”, ambas as visões do matemático aplicado brasileiro Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho (n. 1956). Pode-se argumentar que a matemática pode ser vista como arte, pois ambas são motivadas pela estética.

É preciso dar mais vida à matemática, considerando contextos abrangentes, ricos e não meramente aplicados – e uma possibilidade seria por meio de comparações, como fazem os artistas. Tanto os matemáticos como os artistas não veem as mesmas coisas, parecem saber algo que os outros não sabem. São, portanto, únicos. Nenhuma vida intelectual e estética pode ser completa sem ao

menos apreciar o poder e a beleza da arte e da matemática.

REFERÊNCIAS

- ANONYMOUS. The Japan Prize, International Educational Programme Contest. **The Report of The Tenth Session**, 19 Mar. - 1 Apr., Tokyo, 1975, 52 p.
- ANONYMOUS. The Japan Prize. **The Report of the 28th Japan Prize International Education Program Contest**, 7 Nov. - 11 Nov. 2001, Tokyo, 2001, 76 p.
- ARTE & MATEMÁTICA. Disponível em: <https://cultura.uol.com.br/programas/arte-e-matematica>. Acesso em: 11 set. 2022.
- BBC 2. **The Code**. Documentary, 3 Episodes. Cooter, S., Lachmann, M. (directors), 2011.
- BBC 4. **The Story of Maths**. Documentary, 4 Episodes. Berry, B., Dashwood, R., McGann, K (directors), 2008.
- CORDEIRO, W. Arteônica: Electronic Art. **Leonardo** v. 30, No. 1, p. 33-34, 1997.
- D'AMBROSIO, U. Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* v. 5, p. 44 – 48, 1985.
- DEVLIN, K. **Life By the Numbers**. Wiley, 214 p, 1998.
- FABRIS, A. Waldemar Cordeiro: Computer Art Pioneer”, **Leonardo** 30, No. 1, pp. 27-31, 1997.
- FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Paz & Terra, 81ª edição, 2019, 256 p.
- FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, Netherlands, 1973, 680 p.
- FREUDENTHAL, H. **Weeding and Sowing - Preface to a Science of Mathematical Education**. Springer, New York, 1978, 328 p.
- HERSH, R. **What is Mathematics, Really?** Oxford University Press, Oxford, 1997, 343 p.
- KING, J. P. **The Art of Mathematics**. Plenum Press, New York, 1992, 313 p.
- NASCIMENTO, M. L. F.; BARCO, L. How Does Mathematics Look to You? **Education Canada** 47, p. 66-70, 2007.
- NASCIMENTO, M. L. F. Ave Maria, Fractals and Mathematics. **Math. School** 45, p. 22-23, 2016.
- NASCIMENTO, M. L. F. Beauty, Symmetry and Heart. **Math. School** 47, p. 30-31, 2017.
- NASCIMENTO, M. L. F. Aesthetical Beauty of Mathematics and the Pythagorean Theorem. **3rd Annual International Conference on Education Science and Education Management (ESEM 2018)**, 184 – 189, 2018.
- NASCIMENTO, M. L. F.; BARCO, L. Art & Mathematics: A Brazilian TV Series. **J. Math. Cult.** 16, p. 98-134, 2022.

- NASCIMENTO, M. L. F. Musical Root. **Math. School** 52, p. 14-15, 2023.
- NOLL, A. M. The Beginnings of Computer Art in the United States: A Memoir. **Leonardo** 27, p. 39-44, 1994.
- PARKER, B. **Good Vibrations – The Physics of Music**. The John Hopkins University Press, Baltimore, 2009, 274 p.
- ROQUE, T. M. **História da Matemática: uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas**. Zahar, 2012, 512 p..
- RUSSELL, B. **Mysticism and Logic**. Doubleday, New York, 1917, 173 p.
- VELHO, L. (Editor). Waldemar Cordeiro: **Arteônica** (Waldemar Cordeiro: Arteonics). Sibgrapi, 1993, 35 p.
- WQED Pittsburgh / PBS. **Life By the Numbers**. Documentary, 6 Episodes. Conrad, K., Belko, D. M., Rogal, J. C. (directors), 1998.
- ZIPF, G. K. **The Psychobiology of Language**. Houghton-Mifflin, 1935, 336 p.

AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro